

BEDAH MATERI & STRATEGI

Penyelesaian Soal Kalkulus TKA Matematika
(Fokus Limit Fungsi)

Pemateri: Willy Apriza

*"Menjembatani Kedalaman
Konsep dan Efisiensi Waktu."*

Peta Navigasi Limit Kalkulus TKA

$$x \rightarrow a \quad x = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \frac{f(x) - \dots^n}{x^2 + x^2 (1)}$$

$$y = \frac{g(x)}{g(x)} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{a+b}$$

1. Limit Fungsi Aljabar ($x \rightarrow a$)

Fokus: Mengeliminasi bentuk tak tentu 0/0.

Senjata Utama:

$$x + b \rightarrow a \quad (x - 2x + c) \quad \text{Faktorisasi}$$

Pengalihan Akar Sekawan

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$$

Aturan L'Hôpital $\frac{d}{dx} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$



2. Limit Ketakhinggaan ($x \rightarrow \infty$)

Fokus: Analisis perilaku ujung (end behavior) & dominasi pangkat.

Senjata Utama:

Rasio Pangkat Tertinggi

$$\underline{x^n} + \underline{x^m} \rightarrow \underline{x_m^n} + x^m$$

Rumus Cepat Selisih Akar

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax^2 + qx + r} = \frac{b - q}{2\sqrt{a}}$$



3. Limit Trigonometri ($x \rightarrow 0$)

Fokus: Reduksi dan penyederhanaan sudut mendekati nol.

Senjata Utama:

Identitas Cosinus Ganda

$$\cos(2x) \rightarrow = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$= 2\cos^2(x) - 1$$

Metode Coret Sin & Tan

$$\frac{\cancel{\sin(kx)}}{\cancel{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\tan(kx)}}{\cancel{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} k$$

Bedah Strategi 1: Limit Aljabar (Bentuk 0/0)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2}$$

Cara Konseptual (Pedagogis)

1. Kalikan sekawan $(\sqrt{x+2} + 2)$
2. Faktorkan pembilang menjadi $(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)$
3. Coret pembagi nol $(x-2)$.

Hasil: 16

Trik Cepat TKA (Efisiensi Waktu)

Senjata: Aturan L'Hôpital +
Turunan Akar $[\sqrt{u}]' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Eksekusi: $\frac{(2x)}{1} \rightarrow \frac{2}{2\sqrt{x+2}}$

Substitusi $x=2 \rightarrow \frac{4}{1/4} = \underline{16} \checkmark$

Catatan Pedagogis: Aturan L'Hôpital sangat efisien untuk UTBK, namun pastikan siswa telah memahami konsep 'pembuat nol' terlebih dahulu sebelum diberikan jalan pintas.

Bedah Strategi 2: Limit Trigonometri & Identitas

Senjata Rahasia TKA: Metode Coret

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx} \rightarrow \frac{\cancel{\sin(ax)}}{bx} = \frac{a}{b}$$

Demonstrasi Kasus: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \tan 2x}$

1. Transformasi:
Ubah $1 - \cos 4x$
menjadi $2 \sin^2(2x)$

2. Coret: $\frac{2 \cancel{\sin^2(2x)}}{x \cancel{\tan 2x}}$

3. Evaluasi: $\frac{2(2x)^2}{x(2x)} = \frac{8x^2}{2x^2} = \underline{\underline{4}}$



Peringatan Kritis: Metode coret **HARAM** digunakan secara langsung jika elemen trigonometri dipisahkan oleh tanda (+) atau (-). Wajib difaktorkan terlebih dahulu!

LATIHAN PEMANASAN (1/2)

Tentukan nilai dari:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3} = \dots$$

[RUANG DISKUSI & CORETAN]

LATIHAN PEMANASAN (2/2)

Nilai dari:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 8x - 1}}{-(2x - 3)} = \dots$$

Awas jebakan!
Pastikan bentuk $(dx + e)$
telah diubah ke dalam
bentuk akar kuadrat
sebelum mengeksekusi
rumus $\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$.

[RUANG DISKUSI & CORETAN]

BEDAH SOAL TKA ASLI (1/4) - Jebakan Konsep

Nilai dari $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{5 + 3x - 9x^2} = \dots$

→ Jangan otomatis pakai L'Hôpital!
Cek substitusi langsung dulu.
Apakah ini benar-benar bentuk 0/0?

[RUANG DISKUSI & CORETAN]

BEDAH SOAL TKA ASLI (2/4) - Literasi Matematika

Roni, penjual nasi goreng, menjual dagangannya sebanyak P porsi dan akan memperoleh keuntungan (dalam jutaan rupiah) yang dapat dinyatakan dengan fungsi

$$K(p) = \frac{9p^2 + 2p + 10}{3p^2 + 3p + 2}$$

Keuntungan yang akan diperoleh Roni, apabila dia menjual nasi goreng dengan porsi sangat banyak adalah

☐ Rp2.000.000,00

☐ Rp3.000.000,00

☐ Rp5.000.000,00

☐ Rp9.000.000,00

☐ Rp10.000.000,00

[RUANG DISKUSI & CORETAN]

BEDAH SOAL TKA ASLI (3/4) - Identitas Ganda & Substitusi

Nilai $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \cos(6x - 18)}{(x - \frac{9}{x}) \sin(6x - 18)} = \dots$

☐ $-\frac{3}{2}$

☐ $-\frac{2}{3}$

☐ 0

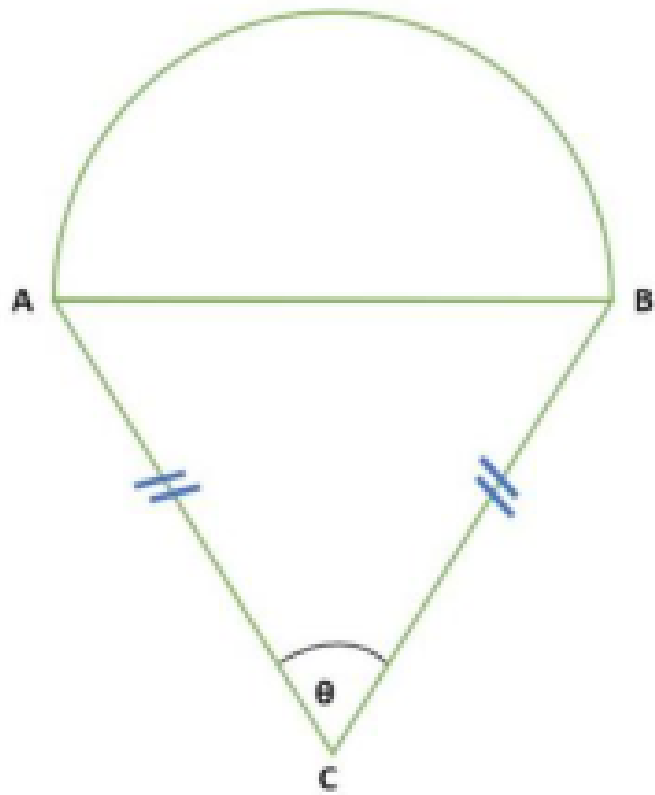
☐ $\frac{2}{3}$

☐ $\frac{3}{2}$

[RUANG DISKUSI & CORETAN]

BEDAH SOAL TKA ASLI (4/4) - Integrasi Geometri (HOTS)

Sebuah setengah lingkaran dengan diameter AB terletak pada segitiga sama kaki ABC dan memiliki panjang 2π , sehingga membentuk daerah berbentuk kerucut es krim seperti pada gambar berikut.



Jika luas segitiga ABC dinyatakan dengan X dan luas setengah lingkaran dinyatakan dengan Y , berikut

ini manakah pernyataan yang benar tentang nilai $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{X}{Y}$?

Pilihlah semua jawaban benar! Jawaban benar lebih dari satu.

☐ Besar jari-jari mempengaruhi nilai limit.

☐ Besar sudut tidak mempengaruhi nilai limit.

☐ Nilai $\frac{X}{Y}$ selalu sama untuk berapapun θ .

☐ $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{X}{Y} = \frac{2}{\pi}$

☐ Jika $\theta = \pi$ maka $\frac{X}{Y} = 0$

[RUANG DISKUSI & CORETAN]

LATIHAN TINGKAT SEDANG (1/2) - Manipulasi Aljabar

Hitung nilai dari ekspresi berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} \right)$$

Petunjuk: Pecah menjadi dua limit terpisah. Gunakan trik selisih akar pada bagian pertama, dan rasio pangkat tertinggi pada pecahan di bagian kedua.

[RUANG DISKUSI & CORETAN]

A 20x20 grid of small black squares. Each square is approximately 10x10 pixels in size. The squares are arranged in a regular, repeating pattern across the entire image area. The background is white.

LATIHAN TINGKAT SEDANG (2/2) - Trigonometri Campuran

Tentukan nilai limit berikut menggunakan strategi pemfaktoran identitas selisih kosinus:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sqrt{4-x}}{\cos x - \cos 3x}$$

[RUANG DISKUSI & CORETAN]

A 20x20 grid of small black squares on a white background. The squares are arranged in a regular pattern, with one square at each intersection of the grid lines. The grid is composed of 20 rows and 20 columns, totaling 400 squares.

LATIHAN TINGKAT SULIT / HOTS (1/2) - Substitusi Tak Hingga

Konstruksi UTBK/SNBT Lanjutan. Hitung nilai dari:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sec \left(\frac{2}{x} \right) - 1 \right)$$

Petunjuk Emas: Lakukan pemisalan $y = 1/x$.
Jika $x \rightarrow \infty$, maka $y \rightarrow 0$.

[RUANG DISKUSI & CORETAN]

A grid of 20 rows and 30 columns of small black squares, resembling a barcode or a data matrix. The squares are arranged in a regular, repeating pattern across the entire image.

Tantangan HOTS 4: Pengembangan Pola Akar TKA

Catatan Pedagogis Guru:
Trik Supersingkat:
Ubah suku linear menjadi
bentuk akar kuadrat
 $\sqrt{d^2x^2 + \dots}$ terlebih dahulu.

Rumus ini hanya berlaku jika $\sqrt{a} + \sqrt{d} + \sqrt{g} + \dots = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 8x} - \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x} \right)$$

Ruang Kosong Pembahasan / Solusi

Soal Tambahan

Soal 1: Tentukan nilai dari persamaan limit polinomial tak hingga berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 22x + 21}{4x^2 + 2x - 15} = \dots$$

Ruang Jawaban:

Soal 2:

Hitunglah nilai dari limit fungsi aljabar di bawah ini:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 8x - 20}{x^2 - 5x + 6} = \dots$$

Ruang Jawaban:

Soal 3:

Berapakah hasil dari limit bentuk akar berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \dots$$

Ruang Jawaban:

Soal 4:

Tentukan nilai dari operasi limit dengan penyebut irasional berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{4 - \sqrt{5x + 1}} = \dots$$

Ruang Jawaban:

Soal 5:

Hitunglah selisih dua akar pada limit tak hingga di bawah ini:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 14} \right) = \dots$$

Ruang Jawaban:

Soal 6: Berapakah hasil dari pemangkatan dalam limit tak hingga berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - 2x)^3}{(x - 1)(2x^2 + x + 1)} = \dots$$

Ruang Jawaban:

Soal 7:

Tentukan nilai dari kombinasi limit trigonometri dan akar berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{1 - \sqrt{1 - x}} = \dots$$

Ruang Jawaban:

Soal 8:

Hitunglah nilai dari limit berikut ini:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \dots$$

Ruang Jawaban:

Soal 9:

Diketahui sebuah limit fungsi bernilai konstanta sebagai berikut:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + (3 - a)x - 3a}{x - a} = 7$$

Maka nilai konstanta a yang memenuhi persamaan di atas adalah...

Ruang Jawaban:

Soal 10:

Jika $f'(a)$ merepresentasikan turunan pertama dari sebuah fungsi f pada titik $x = a$, maka bentuk abstrak dari limit berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a - x) - f(a)}{x}$$

setara dengan bentuk...

Ruang Jawaban:

Soal 11:

Diketahui sebuah fungsi $g(x)$ memiliki limit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 2$.

Berdasarkan informasi tersebut, berapakah nilai dari operasi limit komposit di bawah ini?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sqrt{1-x} - 1} = \dots$$

Ruang Jawaban:

Soal 12:

Tentukan nilai penyelesaian dari persamaan limit tak hingga dengan format tidak standar berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(4x + 5)} - 2x + 1) = \dots$$

Ruang Jawaban:

Soal 13:

Gunakan pemisalan variabel pendukung untuk menentukan nilai limit berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{2x}} - \sqrt{x} \right) = \dots$$

Ruang Jawaban:

Soal 14:

Berapakah hasil dari operasi limit tak hingga dengan tiga suku akar majemuk berikut ini?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 8x} - \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x} \right) = \dots$$

Ruang Jawaban:

Soal 15:

Diketahui nilai $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Berapakah nilai dari operasi limit pendekatan turunan trigonometri di bawah ini?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \frac{1}{2}}{h} = \dots$$

Ruang Jawaban:

Transformasi Dimulai dari Ruang Kelas Kita

Tidak ada rumus cepat yang bisa menggantikan pemahaman konsep yang kokoh. Sebagai guru, tugas kita bukan sekadar mencetak pencetak skor, tetapi membangun arsitek logika masa depan.

Dari Aceh Barat untuk Indonesia: Mari bekali siswa kita dengan pondasi kalkulus yang kuat, agar mereka mampu melampaui batas (limit) kemampuan mereka sendiri.

Terima Kasih – Selamat Berdiskusi!

Forum MGMP Matematika SMA Kab. Aceh Barat | Pemateri: Willy Apriza